

שאלון להערכה עצמית במתמטיקה לקראת לימודי שנה א'

מדוע להתכונן לשנה א'

מסלולי לימוד רבים באוניברסיטה (מדעי המחשב, הנדסה, פיזיקה וכמובן מתמטיקה) דורשים לימודי מתמטיקה בשנה א'. אין מבחני כניסה לקורסים אלו, אולם מי שמוגיע ללא רקע בסיסי יתקשה להצליח בקורס. נסיוננו מראה שתלמידים רבים אכן מגיעים לא מוכנים.

קשה מאד לסגור פערים ברקע המתמטי תוך כדי הלימודים!

שאלון להערכה עצמית

על מנת לעזור לכם להעריך את מידת המוכנות שלכם, קובץ זה מכיל שאלות להערכה עצמית. השאלות מגוונות מבחינת הנושאים ורמת הקושי, ובודקות מימנויות בסיסיות, ידע והבנה. את כולן אפשר לפתור בעזרת כלים מביה"ס ומהתיכון.

אין מגבלת זמן. מומלץ לקחת את הזמן ולחזור בשנית לשאלות שהתקשתם בהן.

אין ניקוד או ציון, אלא רק תחושתכם האישית אודות מידת הקושי ומידת היכולת שלכם להתמודד עם השאלות. אם התקשתם, כדאי שתעננו את החומר הרלוונטי.

לקובץ מצורף פרק פתרונות. אל תציצו בו אלא כדי לבדוק את הפתרונות שמצאתם בעצמכם! אין לכם את מי לרמות אלא את עצמכם. אם הצצתם בפתרון לפני שהגעתם לפתרון משלכם, ואפילו אם "הבנתם" את הפתרון שלנו בדיעבר, עליכם להסיק שלא ידעתם לפתור את השאלה!

ולסיום, השאלות הן מדגם מיצג בלבד, ואין לראות בהם סיכום חומר הרקע הדרוש. לקראת הלימודים באוניברסיטה, כדאי גם לחזור על נושאים נוספים שלמדתם בתיכון ואינם מופיעים בשאלון.

איך להתכונן לשנה א'

כאמור, לפני תחילת הלימודים מומלץ לחזור על, ובמידת הצורך להשלים, חומר מהתיכון. לשם כך אפשר להיעזר בספרי הלימוד התיכוניים. מדובר בחומר רב ויש להקדיש לכך את הזמן ראוי.

בנוסף, המחלקה למתמטיקה מציעה קורס הכנה בשבועות שלפני פתיחת שנת הלימודים. ידע נוסף על הקורס נמצא באתר המחלקה,

<https://mathematics.huji.ac.il/bsc>

נציין שעיקר הקורס איננו חזרה על החומר התיכוני (אם כי יש חפיפה מסויימת), אלא הוא נועד לפתח דרכי חשיבה מתמטיים כלליים. אנו ממליצים בחום להיעזר במשאב זה!

בהצלחה!

שאלות להערכה עצמית

יש לפתור את השאלות לבדכם ללא עזרה. אין להיעזר במחשבון מכל סוג שהוא. אפשר להשתמש בכמה ניר טיוטא שרוצים. אין מגבלת זמן ואפשר (ומומלץ) לקחת את הזמן, ואפילו לחזור כעבור זמן פעם שניה ושלישית לשאלות שלא הצלחתם לפתור.

אל תציצו בפתרונות לפני שתפתרו בעצמכם! הצצה בפתרון פירושה שאינכם מתמודדים עם השאלה בעצמכם, וגם אם "הבנתם" את הפתרון בדיעבר, המסקנה שעליכם להסיק היא שאינכם יודעים לפתור את השאלה!

פעולות אלגבריות

1. כתבו את $3/5 + 5/3 + 1/2$ כשבר מצומצם.

2. פשטו את הביטוי הבא ע"פ פתיחת סוגריים:

$$(a + 1)(b + 2)$$

3. עברו מהביטוי הראשון לשני בעזרת פעולות חשבון (וללא מחשב)

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2}$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{x^2 - 4}$$

4. האם אפשר לכתוב את $x^2 + 4x + 3$ בצורה $(x + d_1)(x + d_2)$? d_1, d_2 מספרים ממשיים.

5. האם אפשר לכתוב את $x^2 + 4x + 5$ בצורה $(x + d_1)(x + d_2)$? d_1, d_2 מספרים ממשיים.

6. איזה תנאי צריכים לקיים המספרים b, c כדי שאפשר יהי לכתוב את $x^2 + bx + c$ בצורה $(x + d_1)(x + d_2)$? b, c, d_1, d_2 מספרים ממשיים.

פתרון משוואות

1. תארו את כל הפתרונות של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 1 + y = x - 1 \end{cases}$$

2. הכריעו עבור אילו פרמטרים a יש פתרון למשוואה

$$\frac{ax - 1}{2a + x} = x$$

אי-שוויונות

1. איזה מספר גדול יותר, $3/8$ או $4/11$? נמקו.
2. איזה מספר גדול יותר, $\sqrt[3]{5}$ או $\sqrt{3}$? נמקו.
3. יהיו a, A, b, B מספרים כך ש- $a < A$ ו- $b < B$. אילו מהאי-שוויונות הבאים בהכרח נובע? (ייתכן שיש יותר מאחד).

$$a + b < A + B$$

$$a - B < A - b$$

$$a - b < A - B$$

$$a - B < b - A$$

4. תארו את המספרים x כך ש

$$\frac{2x + 2}{x - 2} \leq 1$$

5. ציירו את התחום במישור המורכב מנקודות (x, y) המקיימים $y \leq x + c$ פרמטר c נתון.
6. ציירו את התחום במישור המורכב מנקודות (x, y) המקיימים $x^2 \leq 1$.
7. ציירו את התחום במישור המורכב מנקודות (x, y) המקיימים $xy \leq 1$.
8. ציירו את התחום במישור המורכב מנקודות (x, y) המקיימים בו זמנית את שני התנאים הקודמים, דהיינו

$$\begin{cases} x^2 \leq 1 \\ xy \leq 1 \end{cases}$$

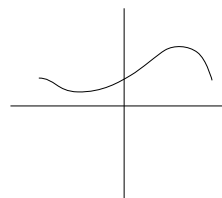
(אפשר להסתפק בציור מקורב).

גיאומטריה אנליטית

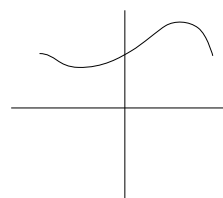
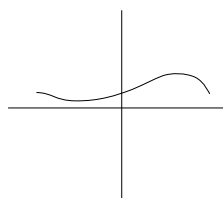
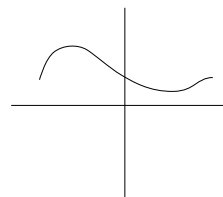
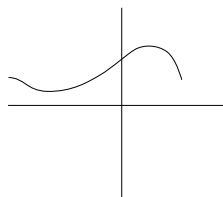
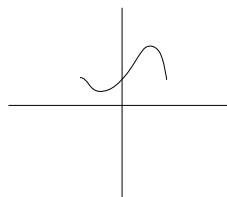
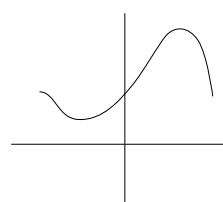
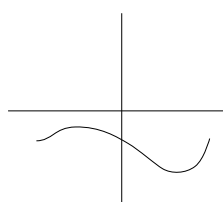
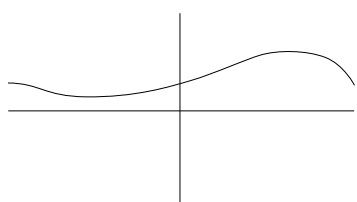
1. מצאו את המשוואה של הישר שעובר דרך הנקודות $(-2, 1)$, $(8, 3)$.
2. מצאו את משוואת המעגל שעובר דרך הנקודות $(4, 3)$, $(2, 1)$, $(2, -5)$.
3. האם קיים מעגל העובר דרך הנקודות $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(-1, -1)$?
4. מצאו את הנקודות (x, y) במישור השייכים הן למעגל היחידה, והן לישר דרך הראשית ששיפועו 4.
5. מצאו את המשוואה של הישר שניצב לישר $y = 10x - 17$ ועובר דרך $(2, 3)$.

פונקציות

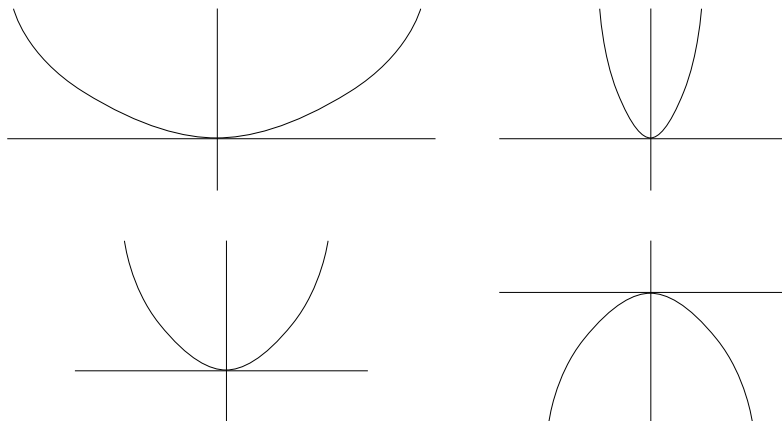
1. הפונקציה $f(x)$ נתונה בגרף הבאה



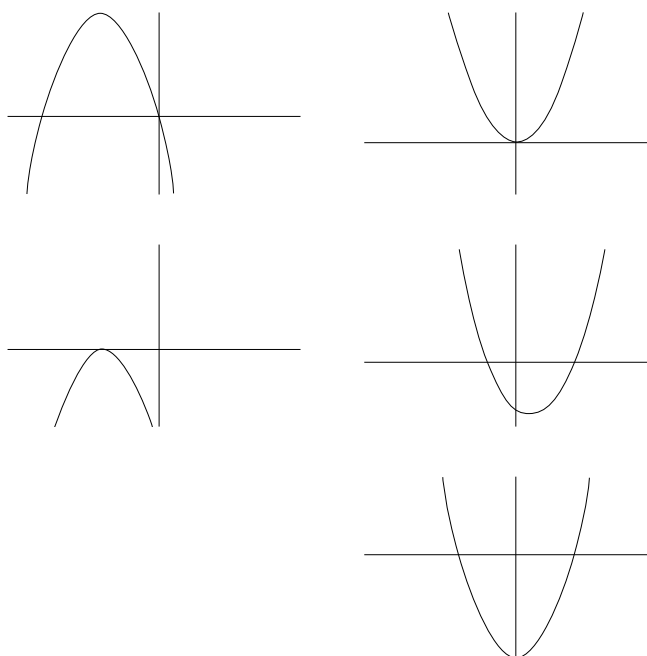
הכריעו איזה גרף למטה מתאים לכל אחת מהפונקציות $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f(x)/2$ ו- $f(2x)$, $2f(x)$, $-f(x)$ (לכל גרף מתאימה פונקציה אחת בלבד):



2. הגרפים למטה שייכים לפונקציות $f(x) = ax^2$ עבור הערכים $1, -1, 2, \frac{1}{2}$ של הפרמטר a . התאימו לכל גרף את הערך a המתאים (לכל אחד מהערכים מתאים בדיוק גרף אחד).



3. הגרפים למטה מתארים פונקציות מהצורה $f(x) = ax^2 + bx + c$. מצאו לכל גרף איזה מהפרמטרים a, b, c מתאפס ולכל פרמטר שאינו מתאפס קבעו האם הוא חיובי או שלילי.



4. ציירו את הגרף של $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, כולל נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה.
 5. מצאו את תחומי העליה והירידה של $f(x) = (1 - x)e^{-x^2}$.

הפונקציות הטריגונומטריות ותכונותיהם

1. באילו נקודות הפונקציה \sin מתאפסת ובאילו מקבלת את הערך 1?

2. באילו קטעים הפונקציה \cos עולה, ובאילו היא יורדת?
3. כיצד מבטאים את $\sin(x+y)$ בעזרת $\sin x, \sin y, \cos x$ ו- $\cos y$?
4. איך מבטאים את $\cos x + \cos y$ כמכפלה של שני ביטויים טריגונומטריים?
5. מהו תחום ההגדרה של \tan , מה תחום ההגדרה של \arcsin ושל \arctan ?
6. מצאו את כל הזוויות x המקיימות $\cos(2x) - 2\cos x + 1 = 0$.
7. מה זה רדיאן? כמה זה 120° ברדיאנים? כמה זה $3\pi/2$ רדיאנים במעלות?
8. הנקודות A, B, C, D מונחות על מעגל ברדיוס 1 בסדר עוקב נגד כיוון השעון. מה שטח המרובע שהן יוצרות אם את המיתרים BA ו-DC רואים ממרכז המעגל בזווית של 60° מעלות, והמיתר CA הנו קוטר?

האקספוננט והלוגריתם

1. אם $a^4 = 2$ ו- $b^5 = 3$, למה שווים המספרים $a^{20}, b^{2.5}, (ab)^{20}$?
2. סדרו את המספרים הבאים לפי סדר עולה: $(1/2)^{10}, (1/2)^{-3}, (1/3)^{-2}, (2^2)^{-3}, 2^3$.
3. מהו $\log_{10}(100)$?
4. עבור $x, y > 0$, כיצד ניתן לרשום את $\log(xy)$ ואת $\log(x^2)$ בעזרת $\log x, \log y$ בלבד?
5. ציירו את הגרף של $e^x, e^{-x}, -e^x, -e^{-x}$.
6. ציירו את הגרף שך $\log_{10} x, \log_{10}(-x), -\log_{10} x$.

קומבינטוריקה

1. בשק 5 כדורים שחורים ו-3 לבנים. מוציאים באקראי 4 כדורים בלי החזרות. מה ההסתברות שהוצאו רק כדורים שחורים? (את התשובה בטאו כשבר פשוט מצומצם).
2. בשק 5 כדורים שחורים ו-3 לבנים. מוציאים באקראי 4 כדורים בלי החזרות. מה ההסתברות שהוצאו שני כדורים מכל צבע? (את התשובה בטאו כשבר פשוט מצומצם).

פתרונות

יש להשתמש בפתרונות רק על מנת לבדוק את עצמכם! אל תתפתו להציץ, אם הצצתם, לא בחנתם את עצמכם. בשאלות שרטוט נתן למצוא פתרון בעזרת מחשב(ון).

פעולות אלגבריות

1. $3/5 + 5/3 + 1/2 = 83/30 = 2\frac{23}{30}$

2. $(a+1)(b+2) = ab + 2a + b + 2$

3. עברו מהביטוי הראשון לשני בעזרת פעולות חשבון

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 4x + 3}{x+2} + \frac{x+1}{x-2} &= \frac{(x^2 + 4x + 3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(x^2 + 4x + 3)(x-2) + (x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{(x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 8x + 3x - 6) + (x^2 + 2x + x + 2)}{x^2 - 4} \\ &= \frac{(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) + (x^2 + 3x + 2)}{x^2 - 4} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

4. כן, השורשים של $x^2 + 4x + 3 = 0$ הם $-1, -3$ (אפשר לפתור גם ע"י השלמה לריבוע), ולכן $x^2 + 4x + 3 = (x - (-3))(x - (-1)) = (x + 3)(x + 1)$

5. לא, כי למשוואה $x^2 + 4x + 5 = 0$ אין פתרונות.

6. חייבים להיות שתי פתרונות למשוואה $x^2 + bx + c = 0$, כלומר $b^2 - 4c \geq 0$ (אם יש שוויון אז $d_1 = d_2$ הם הפתרון היחיד של המשוואה, אחרת d_1, d_2 הם שתי הפתרונות השונים).

פתרון משוואות

1. $y = -3, x = -1$

2. כל $a \geq 2$ או $a \leq -2$

אי-שוויונות נזכיר שאין להשתמש במחשבון!

1. $3/8 > 4/11$: אחרי שעוברים למכנה משותף מקבלים $3/8 = 33/88$ ו $4/11 = 32/88$, $33/88 > 32/88$

2. $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$: שני המספרים גדולים חיוביים לכן העלאת שניהם בחזקה 6 שומר סדר. לכן יחס הסדר ביניהם זהה ליחס בין $(\sqrt[3]{5})^6 = (5^{1/3})^6 = 5^2 = 25$ לבין $(\sqrt{3})^6 = (3^{1/2})^6 = 3^3 = 27$.

3. בהנתן $a < A$ ו $b < B$ מתקיים

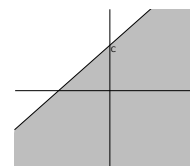
$$a + b < A + B$$

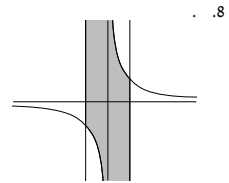
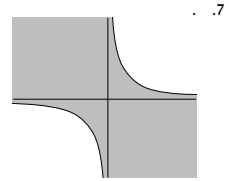
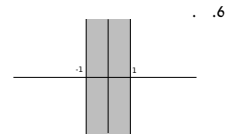
$$a - B < A - b$$

האי-שוויונות האחרים אינם מתקיימים.

4. $-4 \leq x < 2$

5.





גיאומטריה אנליטית

1. $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$

2. $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 34$

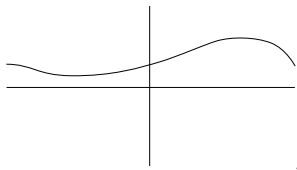
3. לא (אפשר להציב את הנקודות במשוואה $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, ולהראות שין a, b, r הפותרים את המערכת של שלוש משוואות שמתקבלת; או לשים לב שכל הנקודות יושבות על אותו ישר, $y = 2x + 1$, ולכן אין מעגל המכיל את שלושתם).

4. $y = 4/\sqrt{17}$ ו- $x = 1/\sqrt{17}$ או $y = -4/\sqrt{17}$ ו- $x = -1/\sqrt{17}$

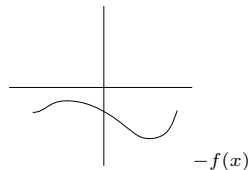
5. $y = -\frac{1}{10}x + \frac{16}{5}$

פונקציות

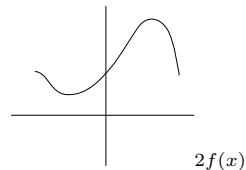
. 1



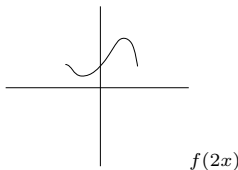
$f(x/2)$



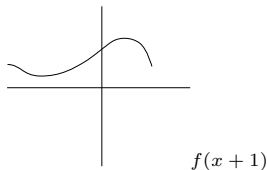
$-f(x)$



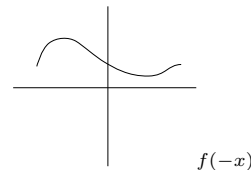
$2f(x)$



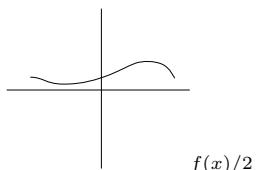
$f(2x)$



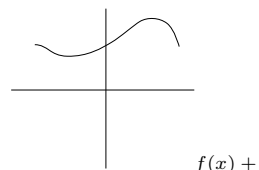
$f(x+1)$



$f(-x)$

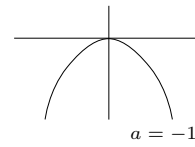
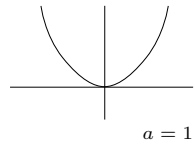
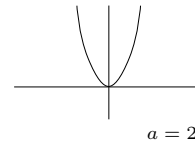
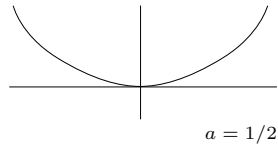


$f(x)/2$

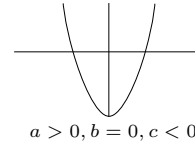
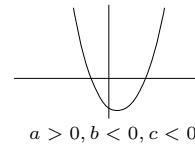
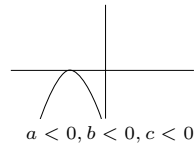
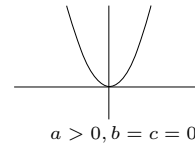
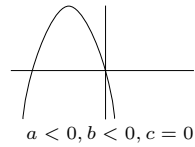


$f(x) + 1$

. 2



. 3



5. $f'(x) = -e^{-x^2} + (1-x)e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(2x^2 - 2x - 1)$. כיוון ש- $e^{-x^2} > 0$ לכל x , הסימן של f' נקבע לפי הסימן של $2x^2 - 2x - 1$. השורשים הם $x_2 = 1 + \sqrt{3}/2$, $x_1 = 1 - \sqrt{3}/2$. בקטע $[x_1, x_2]$ הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת. בקרניים $(-\infty, x_1)$, (x_2, ∞) הנגזרת חיובית ולכן הפונקציה עולה בכל אחת מהקרניים.

הפונקציות הטריגונומטריות ותכונותיהם

1. הפונקציה \sin מתאפסת בנקודות πn , ומקבלת ערך 1 בנקודות $\pi/2 + 2\pi n$ (שלם).
2. עולה בקטעים מהצורה $[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$ ויורדת בקטעים $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ (שלם).
3. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.
4. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
5. \tan מוגדר בכל נקודה שאיננה מהצורה $\frac{\pi}{2} + \pi n$ (שלם). \arcsin מוגדר בקטע $[-1, 1]$ ו- \arctan בכל הישר.
6. כיוון ש- $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ השוויון שקול ל- $2\cos^2 x - 2\cos x = 0$ כלומר $\cos x$ פותר את המשוואה $2y^2 - 2y = 0$ שהפתרונות שלו הם $y = 0$ ו- $y = 1$. $\cos x = 0$ כאשר $x = \pi/2 + \pi n$ (שלם) ו- $\cos x = 1$ כאשר $x = 2\pi n$ (שלם).
7. $120^\circ = 2\pi/3$ רדיאנים, ו- $3\pi/2 = 270^\circ$ רדיאנים הם 270° .
8. $\sqrt{3}$.

האקספוננט והלוגריתם

. 1

$$a^{20} = (a^4)^5 = 2^5 = 32$$

$$b = (b^5)^{1/2} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$(ab)^{20} = a^{20}b^{20} = 32 \cdot 81 = 2592$$

$$b^{20} = (b^5)^4 = 3^4 = 81$$

2. סדרו את המספרים הבאים לפי סדר עולה:

$$(1/2)^{10} < (2^2)^{-3} < (1/2)^{-3} = 2^3 < (1/3)^{-2}$$

.

$$\log_{10}(100) = 2 \quad .3$$

$$\log(x^2) = 2 \log(x), \log(xy) = \log(x) + \log y \quad .4$$

קומבינטוריקה

.1 $1/14$

.2 $3/7$